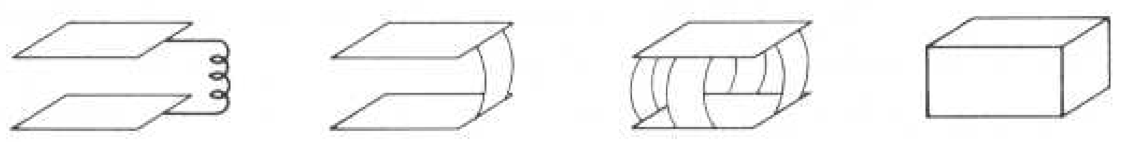
CAVIDADES RESSONANTES

Em freqüências na faixa de microondas (> 300 MHz), elementos localizados tais como R, L e C têm comportamento bastante diverso de seu comportamento em baixas freqüências. Isto porque em altas freqüências o efeito pelicular e as perdas por radiação tornam-se importantes. Assim, na faixa de microondas os circuitos ressonantes RLC são substituídos pelas cavidades ressonantes.

As cavidades ressonantes são estruturas completamente fechadas por paredes metálicas. Elas confinam a energia eletromagnética e dispõem de grandes áreas para a circulação de corrente, eliminando radiação e diminuindo as perdas.

A figura abaixo mostra a transformação gradual de um circuito ressonante LC numa cavidade ressonante.



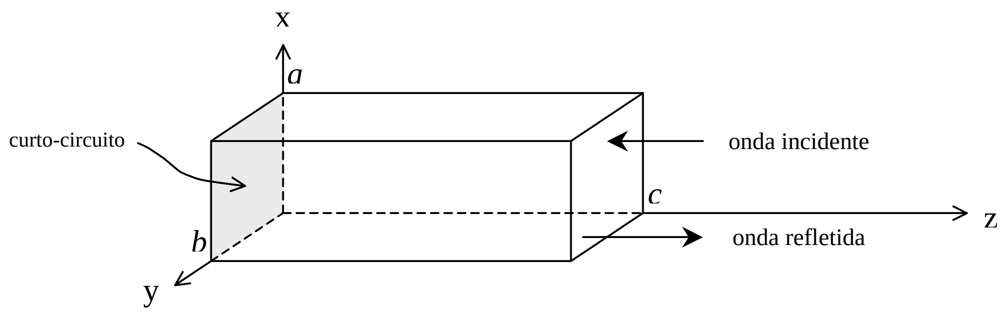
No circuito LC, utilizado em baixas freqüências, os comprimentos de onda correspondentes são muito maiores que as dimensões físicas do circuito. Desta forma, as energias elétrica e magnética são armazenadas em diferentes regiões do espaço (energia elétrica em C e energia magnética em L). Neste tipo de ressonador, *a parâmetros concentrados*, as grandezas de interesse são a corrente e a tensão nos elementos. Já as cavidades são usadas em altas freqüências e os comprimentos de onda envolvidos são da mesma ordem de grandeza das dimensões físicas do dispositivo. Assim, as energias elétrica e magnética estão distribuídas no espaço confinado pela cavidade. As grandezas de interesse, neste caso, são os campos elétrico e magnético e as densidades de energia. Este tipo de ressonador é dito *a parâmetros distribuídos*.

Utilizando teoria de circuitos, pode-se obter a freqüência de ressonância do circuito LC, dada por: $f_r = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

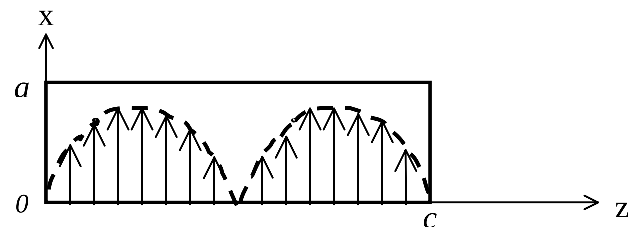
Uma cavidade possui várias freqüências de ressonância, cada uma correspondendo a diferentes modos. Para obter a configuração dos campos dos diversos modos e suas freqüências de ressonância, as equações de Maxwell devem ser resolvidas sujeitas às condições de contorno impostas (campo elétrico tangencial nulo nas paredes da cavidade).

Análise alternativa:

Considera-se a cavidade ressonante como um segmento de guia de onda curto-circuitado nas duas extremidades. Por exemplo, para uma cavidade retangular:



A composição das ondas incidente e refletida forma uma onda estacionária na direção *z*:



Por exemplo, considerando a propagação do modo TE_{mn} no guia no sentido "-z" (onda incidente):

Guia: $$E_x = A\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\,e^{j\beta z}, \qquad (1)$$

onde A é uma constante.

A onda na cavidade será a soma da onda incidente com a onda refletida. Esta se propaga na direção "+z" e tem amplitude igual à da onda incidente, mas com a fase invertida.

Cavidade: $$E_x = A\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\left(e^{j\beta z} - e^{-j\beta z}\right), \qquad (2)$$

Como $\mathrm{sen}\theta = (e^{j\theta} - e^{-j\theta})/2j$, tem-se:

$$E_x = 2jA\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\,\mathrm{sen}\,\beta z. \qquad (3)$$

Este campo deve obedecer às condições de contorno: $E_x = 0$ em $z = 0$ e $z = c$. Desta forma:

$$\mathrm{sen}\,\beta z\big|_{z=c} = \mathrm{sen}\,\beta c = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \beta c = p\pi \qquad (p = 0, 1, 2, ...)$$

Assim: $$\beta = \frac{p\pi}{c}.$$

Tem-se, portanto:

$$E_x = E_0\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\,\mathrm{sen}\left(\frac{p\pi z}{c}\right), \qquad (4)$$

onde E_0 é uma constante. As outras componentes de campo podem ser obtidas de maneira análoga.

Notação dos modos

A designação dos modos TE e TM não é única já que se poderia ter definido *x*, *y* ou *z* como "direção de propagação" (na verdade não há propagação em nenhum sentido, mas ondas estacionárias em todas as direções). Por exemplo, um modo TE em relação ao eixo *x* pode ser um modo TM em relação ao eixo *y*. Adotando um dos eixos como direção de propagação, os modos são designados como TE_{mnp} e TM_{mnp}. Os índices *m*, *n* e *p* correspondem ao número de semiciclos de variação dos campos nas três direções espaciais.

Freqüências de ressonância da cavidade retangular

Usando $\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\mu\varepsilon} = j\beta$ e $\beta = \frac{p\pi}{c}$, obtém-se:

$$f_r = \frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2}\,. \qquad (5)$$

Em relação aos índices *m*, *n* e *p*, pode-se mostrar que pelo menos dois deles devem ser não nulos. Em outras palavras, os modos TE ou TM "*000*", "*m00*", "*0n0*" e "*00p*" não são permitidos num guia retangular já que tais modos correspondem a campos identicamente nulos.

Modo dominante:

Corresponde ao modo com a mais baixa freqüência de ressonância da cavidade. Se *c* é a menor dimensão da cavidade ($a > c$ e $b > c$), a freqüência de ressonância do modo dominante é dada por:

$$f_d = \frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2}\,. \qquad (a, b > c) \qquad (6)$$

Exemplo: Calcular a freqüência de ressonância dominante de uma cavidade retangular preenchida com ar cujas dimensões são:
a) $4\,\text{cm} \times 5\,\text{cm} \times 6\,\text{cm}$;
b) $5\,\text{cm} \times 5\,\text{cm} \times 2\,\text{cm}$;
c) $4\,\text{cm} \times 4\,\text{cm} \times 4\,\text{cm}$.

SOLUÇÃO: **a)** $f_d = \dfrac{1}{2\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\sqrt{\left(\dfrac{1}{0{,}05}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{0{,}06}\right)^2} \Rightarrow \boxed{f_d = 3{,}905\ \text{GHz}}$

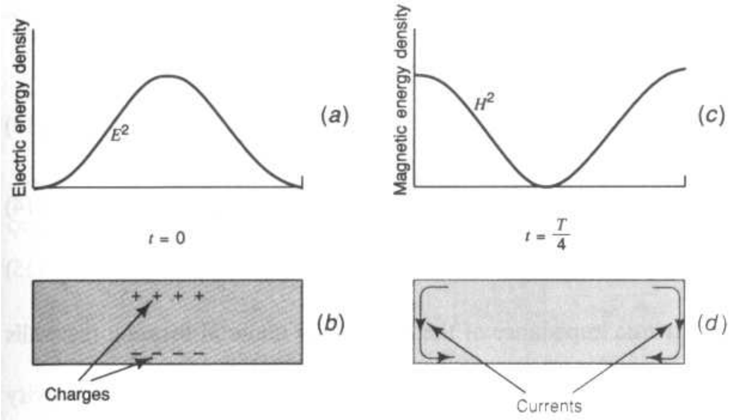
b) $f_d = \dfrac{1}{2\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\sqrt{\left(\dfrac{1}{0{,}05}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{0{,}05}\right)^2} \Rightarrow \boxed{f_d = 4{,}242\ \text{GHz}}$

c) $f_d = \dfrac{1}{2\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\sqrt{\left(\dfrac{1}{0{,}04}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{0{,}04}\right)^2} \Rightarrow \boxed{f_d = 5{,}303\ \text{GHz}}$

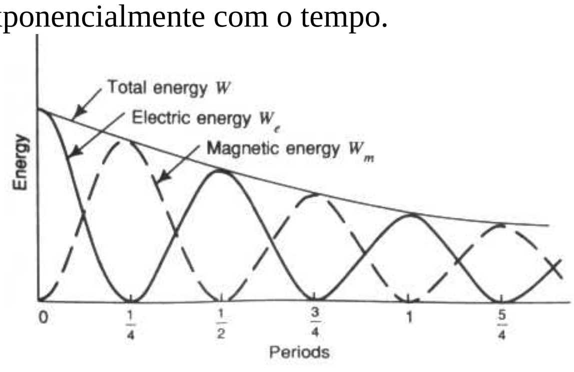
Energia e Fator de Qualidade

No interior da cavidade, os campos elétrico e magnético estão sempre em quadratura (tanto no espaço quanto no tempo) de modo que quando um campo é máximo o outro é nulo e vice-versa. Assim, a energia passa de inteiramente elétrica a inteiramente magnética duas vezes por ciclo. Isto é análogo ao que ocorre num circuito LC oscilante.

Quando a energia é puramente elétrica, o campo magnético e as correntes nas paredes da cavidade são nulos, o campo elétrico é máximo e há uma acumulação de cargas elétricas positivas e negativas em paredes opostas. Um quarto de ciclo (T/4) mais tarde a energia é puramente magnética. Neste instante as correntes e o campo magnético são máximos enquanto que as cargas e o campo elétrico são nulos.



Se não há perdas, a energia oscila indefinidamente entre as formas elétrica e magnética, permanecendo com valor total constante. Na prática, entretanto, sempre há alguma perda, seja nas paredes condutoras, no dielétrico ou devido aos acoplamentos externos. Desta forma, a energia total decresce exponencialmente com o tempo.



Fator de qualidade (Q):

O fator de qualidade é uma medida das perdas num ressonador. É definido como abaixo:

$$Q = 2\pi \, \frac{\text{Energia total armazenada}}{\text{Energia perdida por ciclo}}. \qquad (7)$$

Pode-se obter a energia total armazenada, por exemplo, através da integração da densidade de energia elétrica ($w_e = ½\, \varepsilon E^2$) no volume interno da cavidade no instante em que o campo elétrico é máximo. Para dielétricos sem perdas e se não há acoplamento externo, toda a perda de energia se dá por efeito Joule nas paredes condutoras. A perda total de energia pode ser calculada através da integração da densidade de potência média (vetor de Poynting) através de todas as paredes e multiplicando o resultado pelo período T.

Para uma cavidade retangular com *a* > *c* e *b* > *c*, preenchida com um dielétrico perfeito e sem perdas por acoplamento, pode-se mostrar que o fator de qualidade do modo dominante é dado por:

$$Q_d = \frac{\left(a^2 + b^2\right)abc}{\delta\left[2c\left(a^3 + b^3\right) + ab\left(a^2 + b^2\right)\right]}, \qquad \text{(modo dominante; } a, b > c\text{)} \qquad (8)$$

onde $\delta = 1\big/\sqrt{\pi f_d \mu \sigma_c}$ é a profundidade pelicular nas paredes da cavidade na freqüência de ressonância do modo dominante.

De uma maneira geral, independente de sua forma, o fator de qualidade de uma cavidade devido unicamente às perdas nas paredes condutoras é dado por:

$$Q = k \cdot FG \cdot \frac{V}{\delta S}, \qquad (9)$$

onde *k* é uma constante que depende do dielétrico, FG é um fator geométrico que depende da forma da cavidade, V é o volume interno e S e δ são, respectivamente, a superfície interna total e a profundidade pelicular das paredes condutoras.

Valores típicos de Q em cavidades são da ordem de 2000 a 10000, o que é cerca de 20 ou mais vezes maior que os Q de circuitos LC. Por exemplo, para uma cavidade cúbica de cobre preenchida com ar, o fator de qualidade é de cerca de 10700 em 10 GHz.

Os fatores que podem diminuir o fator de qualidade de uma cavidade são as imperfeições na sua construção, os sistemas de acoplamento (excitação e carregamento) e a corrosão das paredes condutoras. Na prática, é comum revestir as paredes internas da cavidade com prata ou ouro a fim de diminuir a resistência superficial devida ao efeito pelicular e aumentar o fator de qualidade.

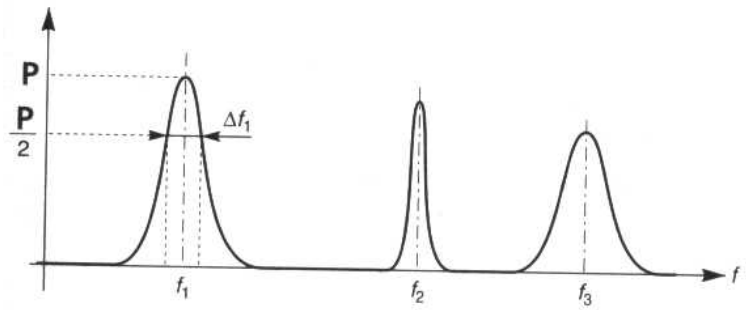
Considerando não somente as perdas nas paredes condutoras mas também as perdas no dielétrico e os acoplamentos, o Q efetivo da cavidade diminui e é dado por:

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_c} + \frac{1}{Q_d} + \frac{1}{Q_a}, \qquad (10)$$

onde Q_c, Q_d e Q_a são os fatores de qualidade referente às perdas nas paredes condutoras, no dielétrico e nos acoplamentos, respectivamente.

Seletividade:

O fator de qualidade é também uma medida de quão seletiva é a cavidade em relação às freqüências do sinal de excitação. Para uma tensão de excitação fixa, a potência absorvida pela cavidade varia com a freqüência do sinal de entrada segundo a *curva de ressonância*:



Para uma dada freqüência de ressonância, a largura de banda correspondente (faixa de freqüências na qual a potência absorvida não cai abaixo da metade da potência máxima) é dada por:

$$\Delta f = \frac{f_r}{Q}. \tag{11}$$

Assim, quanto maior for o fator de qualidade, menor será a largura de banda correspondente e, conseqüentemente, mais seletiva a cavidade será em relação às freqüências de excitação.

Exemplo: Uma cavidade de cobre ($\sigma_c = 5{,}8 \times 10^7$ S/m) preenchida com ar tem dimensões 5 cm × 4 cm × 10 cm. Calcular:
a) a freqüência de ressonância dominante;
b) o fator de qualidade na freqüência dominante e a largura de banda correspondente.

SOLUÇÃO: **a)** adotando a = 10 cm, b = 5 cm e c = 4 cm:

$$f_d = \frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2} = \frac{3\times 10^8}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{0{,}1}\right)^2 + \left(\frac{1}{0{,}05}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad f_d = 3{,}354\,\text{GHz}$$

b) $\delta = 1\Big/\sqrt{\pi f_d \mu \sigma_c} = 1\Big/\sqrt{\pi \times 3{,}354\times 10^9 \times 4\pi\times 10^{-7} \times 5{,}8\times 10^7} \quad \Rightarrow \quad \delta = 1{,}141\times 10^{-4}$ cm

$$Q_d = \frac{\left(a^2 + b^2\right)abc}{\delta\left[2c\left(a^3 + b^3\right) + ab\left(a^2 + b^2\right)\right]} = \frac{\left(10^2 + 5^2\right)10\times 5\times 4}{1{,}141\times 10^{-4}\left[2\times 4\left(10^3 + 5^3\right) + 10\times 5\left(10^2 + 5^2\right)\right]}$$

$$Q_d = 14367$$

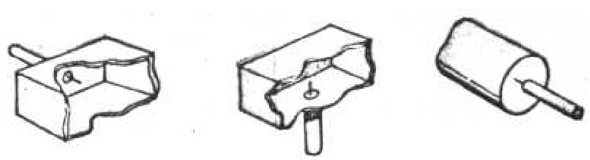
$$\Delta f = \frac{f_r}{Q} = \frac{3{,}354\times 10^9}{14367} \quad \Rightarrow \quad \Delta f = 233{,}4\,\text{kHz}$$

Excitação de Cavidades Ressonantes

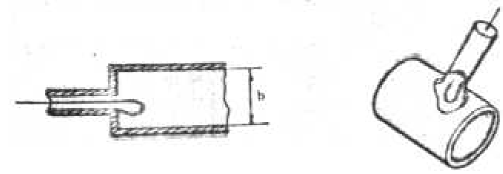
Uma vez que uma cavidade apresenta teoricamente uma infinidade de modos de ressonância, é possível ter-se um número infinito de freqüências de ressonância. Na prática, no entanto, somente algumas freqüências são de interesse. Para uma aplicação específica, na maior parte dos casos a cavidade é projetada e acoplada de maneira que um único modo ressonante seja excitado (geralmente o modo dominante). É preciso lembrar que só se pode gerar um campo na cavidade excitando um modo particular, o que é conseguido somente se a excitação possuir energia na freqüência correspondente ao modo de interesse.

A maneira de acoplamento depende fundamentalmente das configurações de campo no interior da cavidade para o modo desejado. Os acoplamentos com cabos coaxiais geralmente são feitos através de sondas elétricas ou pontas de prova (posicionadas paralelas ao campo elétrico onde este é máximo) ou através de anéis de corrente (posicionados perpendicularmente ao campo magnético onde este é máximo). Combinações destes métodos também são possíveis. O acoplamento com guias de onda geralmente é feito através de aberturas (íris). O acoplamento com um feixe de elétrons pode ser feito através de aberturas em lados opostos da cavidade (o feixe deve estar alinhado com as linhas de campo elétrico). As figuras abaixo ilustram alguns exemplos de acoplamento.

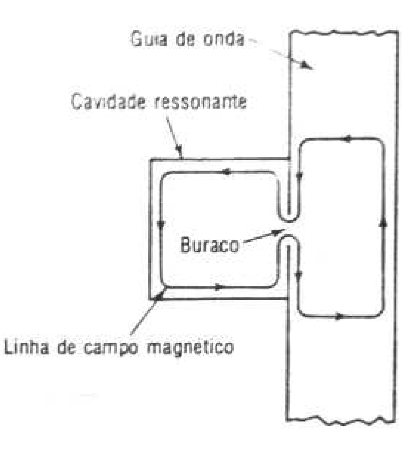
Acoplamento com ponta de prova



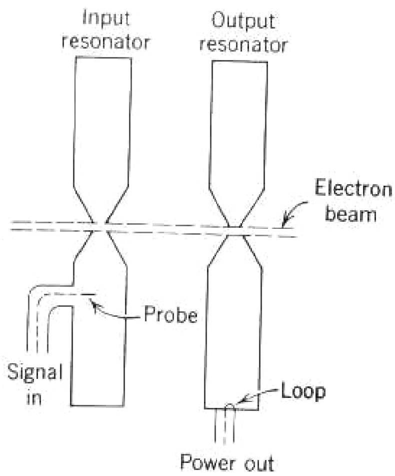
Acoplamento com anel de corrente



Acoplamento através de abertura



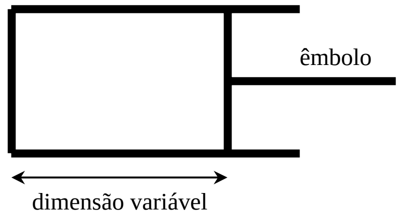
Acoplamento com feixe de elétrons



Dimensões de uma Cavidade

Dentre os principais fatores que definem a forma e as dimensões de uma cavidade estão a freqüência de ressonância, o fator de qualidade, a forma de utilização e a maneira pela qual será excitada, carregada e sintonizada.

É possível sintonizar uma cavidade ressonante, por exemplo, variando suas dimensões. A figura abaixo exemplifica.



Aplicações

As cavidades ressonantes são utilizadas onde se necessita de circuitos ressonantes de alta freqüência com elevados fatores de qualidade. Alguns exemplos de aplicação são em osciladores, filtros e amplificadores sintonizados em freqüências de microondas. Outras aplicações são em medidas de altas freqüências, caracterização de materiais, ensaios de compatibilidade eletromagnética, dentre outras. O forno de microondas doméstico consiste basicamente de uma fonte de microondas (válvula ‘magnetron”) operando em 2,45 GHz, de um guia de ondas e da cavidade do forno. O aquecimento é obtido através das perdas no material na freqüência de operação.