

Capítulo 6

Guias de Onda e Cavidades Ressonantes

6.1 Introdução

Assim como as linhas de transmissão, os guias de onda são dispositivos utilizados para o transporte de energia e informação de um ponto a outro no espaço. Os guias são estruturas metálicas cilíndricas ocas que, na prática, têm seção transversal retangular, circular ou elíptica, como mostra a Figura 6.1. A vantagem dos guias está no fato das perdas ao longo de seu comprimento serem menores que aquelas oferecidas por linhas de transmissão, uma vez que eles não são preenchidos por dielétricos. Por outro lado, os guias de onda só podem ser empregados em frequências altas (a partir da faixa de microondas), pois as suas dimensões dependem da frequência mínima de propagação das ondas no interior destes.

Diferentemente do que foi visto no estudo de linhas de transmissão, a análise de propagação de ondas eletromagnéticas em guias de ondas só pode ser feita através da teoria eletromagnética, partindo-se das equações de onda envolvendo os campos elétrico e magnético. Não é possível fazer uma análise em termos de circuitos elétricos, pois não se sabe como está distribuída a corrente no único condutor externo que compõe o guia.

Para auxiliar a determinação dos campos eletromagnéticos que se propagam num guia, são apresentados na Seção 6.2 os potenciais vetores de Hertz [7]. Porém, vale a pena salientar que é possível se obter estes campos diretamente das equações de Maxwell.

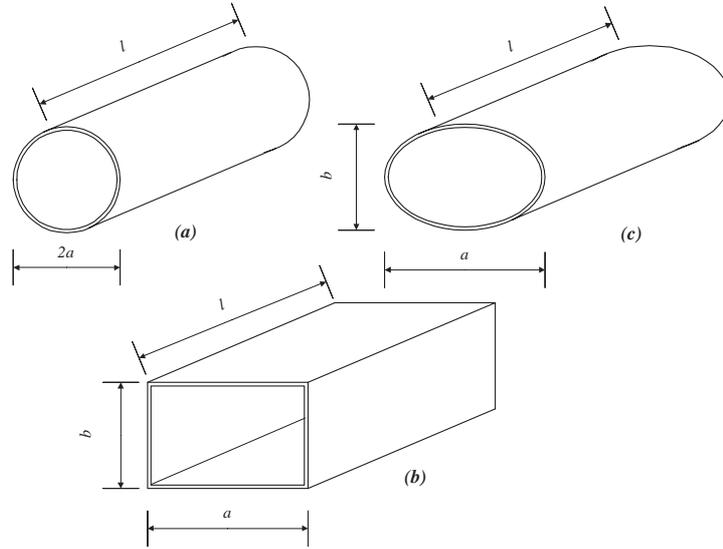


Figura 6.1: Tipos de guias: (a) cilíndrico circular; (b) retangular; (c) elíptico.

6.2 Potenciais Vetores de Hertz

Assim como os potenciais de retardo \mathbf{A} e \mathbf{F} [2], os potenciais vetores de Hertz elétrico $\mathbf{\Pi}_e$ e magnético $\mathbf{\Pi}_h$ são grandezas matemáticas que auxiliam na resolução das equações de onda [7]. Sabe-se da análise vetorial que campos vetoriais obedecem a seguinte condição

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F} \equiv 0 \quad (6.1)$$

assim como uma função potencial ϕ qualquer satisfaz

$$\nabla \times \nabla \phi = 0 \quad (6.2)$$

Num espaço livre de cargas elétricas, os campos elétrico e magnético satisfazem as equações de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (6.3)$$

e

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (6.4)$$

Portanto, pode-se escrever os vetores campo elétrico e campo magnético em função de potenciais que obdeçam a identidade (6.1), isto é,

$$\mathbf{E} = -j\omega\mu\nabla \times \mathbf{\Pi}_h \quad (6.5)$$

e

$$\mathbf{H} = j\omega\epsilon\nabla \times \mathbf{\Pi}_e \quad (6.6)$$

Substituindo-se (6.5) na equação de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (6.7)$$

tem-se

$$\nabla \times \mathbf{H} = k^2\nabla \times \mathbf{\Pi}_h \quad (6.8)$$

Logo,

$$\mathbf{H} = k^2\mathbf{\Pi}_h \quad (6.9)$$

ou de uma forma geral

$$\mathbf{H} = k^2\mathbf{\Pi}_h + \nabla\phi_h \quad (6.10)$$

Substituindo-se (6.5) e (6.10) na equação de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (6.11)$$

tem-se

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{\Pi}_h = k^2\mathbf{\Pi}_h + \nabla\phi_h \quad (6.12)$$

ou

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_h) - \nabla^2\mathbf{\Pi}_h = k^2\mathbf{\Pi}_h + \nabla\phi_h \quad (6.13)$$

Impondo-se a condição de Lorentz

$$\phi_h = \nabla \cdot \mathbf{\Pi}_h \quad (6.14)$$

obtem-se

$$\nabla^2\mathbf{\Pi}_h + k^2\mathbf{\Pi}_h = 0 \quad (6.15)$$

A solução da equação diferencial (6.15) fornece a expressão do potencial vetor de Hertz magnético que, por sua vez, possibilita a determinação de \mathbf{E} através de (6.5) e \mathbf{H} a partir de

$$\mathbf{H} = k^2 \mathbf{\Pi}_h + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_h) = \nabla \times \nabla \times \mathbf{\Pi}_h \quad (6.16)$$

De forma semelhante, pode-se obter a equação diferencial que fornece a expressão do potencial vetor de Hertz $\mathbf{\Pi}_e$ a partir da substituição de (6.6) em (6.11), ou seja,

$$\nabla \times \mathbf{E} = k^2 \nabla \times \mathbf{\Pi}_e \quad (6.17)$$

ou, de uma forma geral,

$$\mathbf{E} = k^2 \mathbf{\Pi}_e + \nabla \phi_e \quad (6.18)$$

Substituindo-se (6.6) e (6.18) em (6.7), tem-se

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{\Pi}_e = k^2 \mathbf{\Pi}_e + \nabla \phi_e \quad (6.19)$$

ou

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_e) - \nabla^2 \mathbf{\Pi}_e = k^2 \mathbf{\Pi}_e + \nabla \phi_e \quad (6.20)$$

Impondo-se a condição de Lorentz

$$\phi_e = \nabla \cdot \mathbf{\Pi}_e \quad (6.21)$$

obtem-se

$$\nabla^2 \mathbf{\Pi}_e + k^2 \mathbf{\Pi}_e = 0 \quad (6.22)$$

A partir da solução de (6.22) pode-se determinar a expressão do campo magnético através de (6.6) e a do elétrico a partir de

$$\mathbf{E} = k^2 \mathbf{\Pi}_e + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_e) = \nabla \times \nabla \times \mathbf{\Pi}_e \quad (6.23)$$

6.3 Modos de Propagação num Guia

Foi visto nos capítulos anteriores que uma onda propagando-se no espaço-livre tem campo elétrico e magnético transversais ou ortogonais à direção de propagação, isto é, a onda é dita TEM (transversal elétrica e magnética). Numa linha de transmissão constituída de condutores perfeitos, a propagação é também do tipo TEM. Entretanto, nos guias de onda, o modo de propagação TEM não é suportado, ou melhor, não tem condições de existir isoladamente. A onda que se propaga num guia pode ser considerada como uma combinação linear de frentes de ondas TEM

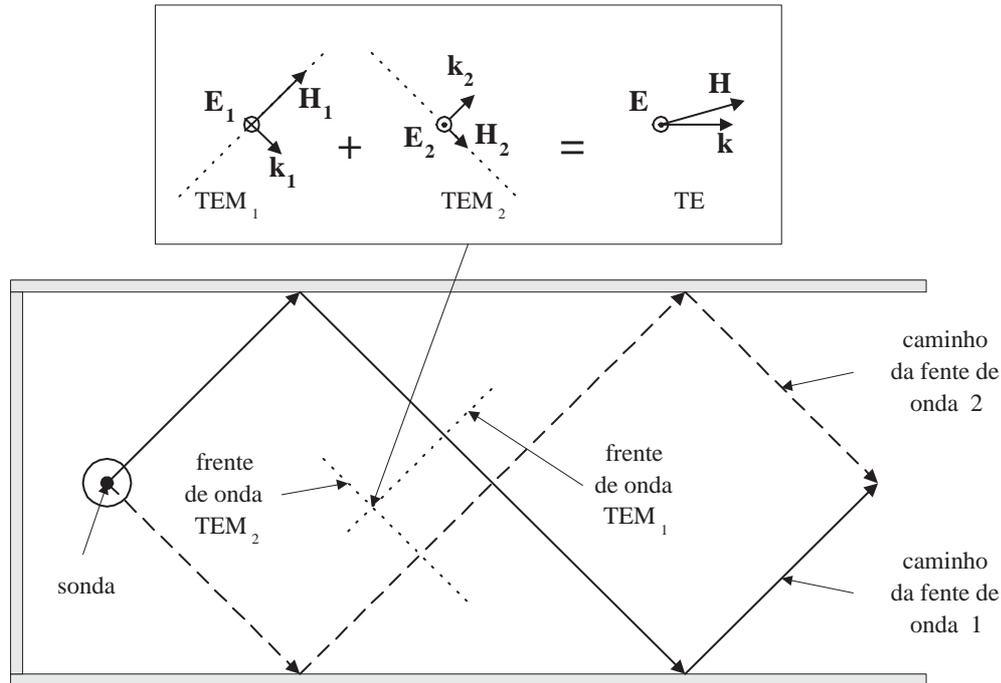


Figura 6.2: Ondas Transversal Elétrica (TE), resultado da combinação de duas frentes de onda TEM.

que sofrem múltiplas reflexões ao longo das paredes deste. O resultado desta combinação de frentes TEM são ondas que possuem componentes de campo na direção de propagação, como mostrado nas Figuras 6.2 e 6.3. Quando todas as componentes do campo elétrico são transversais à direção de propagação, diz-se que a onda se propaga no modo TE (transversal elétrico). Enquanto aquelas com componentes de campo magnético transversal são denominadas de onda TM (transversal magnético).

O modo de propagação num guia de onda depende do tipo de excitação, ou melhor, de como a onda é injetada neste. A excitação de guias pode ser feita através de sondas ou acoplamento eletromagnético. A Figura 6.4 mostra um guia retangular sendo excitado por um cabo coaxial terminado numa sonda. Observa-se nas Figuras 6.4a e 6.4b que a sonda é reta e está colocada numa das paredes laterais do guia. Nesta posição, a sonda radia ondas eletromagnéticas que se propagam no modo TE. O vetor campo elétrico tem a mesma direção da sonda reta, enquanto o campo magnético próximo circula a mesma. Já as Figuras 6.4c e 6.4d mostram uma excitação que favorece a propagação do modo TM, pois o campo magnético circulante está totalmente transversal à direção de propagação.

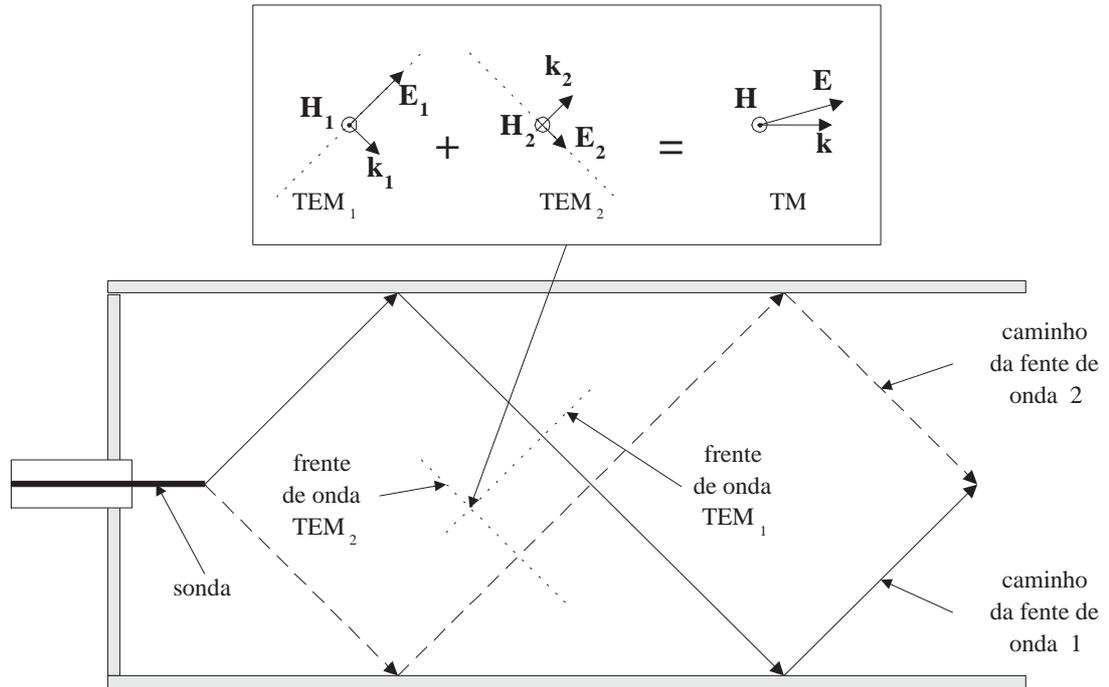


Figura 6.3: Ondas Transversal Elétrica (TM), resultado da combinação de duas frentes de onda TEM.

6.4 Campos num Guia de Onda

Para se obter as expressões dos campos elétrico e magnético dentro de um guia de onda é necessário se utilizar as equações de Maxwell, que levam, inevitavelmente, à resolução das equações de onda. Se a variação dos campos no tempo é harmônica, então, resolve-se apenas as equações de Helmholtz para se obter as expressões dos campos em qualquer ponto do espaço interno do guia. Como foi dito anteriormente, estas expressões podem ser obtidas através dos potenciais vetores de Hertz.

6.4.1 Modo Transversal Elétrico

Sabe-se que, no modo de propagação TE, uma das componentes do campo magnético está alinhada com a direção de propagação. Portanto, pode-se associar essa componente com o potencial vetor de Hertz do tipo magnético. No caso de um guia cujo comprimento coincide com a direção z , o potencial vetor magnético é escrito como

$$\mathbf{\Pi}_h = \Pi_h \mathbf{a}_z \quad (6.24)$$

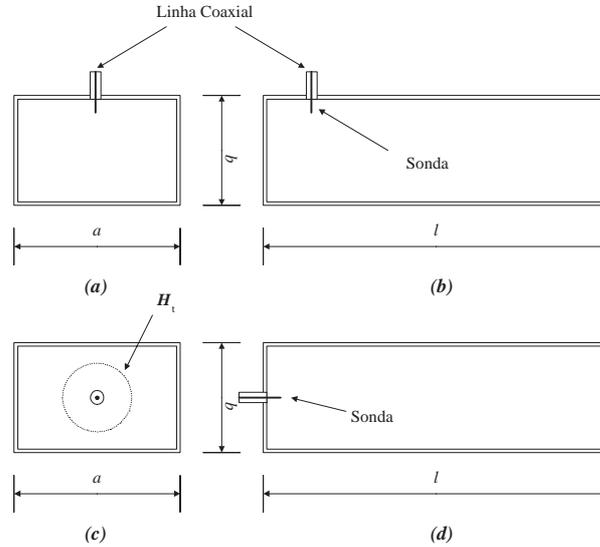


Figura 6.4: Guia retangular com excitação para operar no: modo TE , (a) corte transversal e (b) corte longitudinal; modo TM , (c) corte transversal e (d) corte longitudinal.

Portanto, os campos elétrico e magnético no interior do guia podem ser obtidos respectivamente de (6.5) e (6.16). Observe que as expressões obtidas de (6.5) são ortogonais à direção de propagação, confirmando que o modo de propagação é do tipo TE. Já a equação (6.16) fornece as componentes transversais e na direção de propagação. Entretanto, é necessário primeiro determinar a expressão do potencial vetor $\mathbf{\Pi}_h$ a partir de (6.15). Considerando que a propagação da onda se dá no sentido z^+ , a solução de (6.15) tem que ser do tipo

$$\mathbf{\Pi}_h = \Pi_h \mathbf{a}_z = \psi_h(x, y) e^{-\gamma z} \mathbf{a}_z \quad (6.25)$$

sendo $\psi_h(x, y)$ uma função que representa a variação transversal do potencial vetor e $\gamma = \alpha + j\beta$ a constante de propagação da onda no guia. Lembrando-se que o Laplaciano em coordenadas retangulares é

$$\nabla^2 \mathbf{\Pi}_h = \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}_h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}_h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}_h}{\partial z^2} \quad (6.26)$$

e como $\mathbf{\Pi}_h$ é dado por (6.25), então,

$$\nabla^2 \mathbf{\Pi}_h = \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}_h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}_h}{\partial y^2} + \gamma^2 \mathbf{\Pi}_h = \nabla_t^2 \mathbf{\Pi}_h + \gamma^2 \mathbf{\Pi}_h = 0 \quad (6.27)$$

Dessa maneira, a equação (6.15) pode ser reescrita como

$$\nabla_t^2 \mathbf{\Pi}_h + k_c^2 \mathbf{\Pi}_h = 0 \quad (6.28)$$

ou simplesmente

$$\nabla_t^2 \psi_h + k_c^2 \psi_h = 0 \quad (6.29)$$

onde

$$k_c^2 = \gamma^2 + k^2 \quad (6.30)$$

Apesar da dedução da equação (6.29) ter sido feita utilizando coordenadas retangulares, este resultado pode ser aplicado em qualquer sistema de coordenadas.

Como foi dito anteriormente, o campo elétrico pode ser obtido de (6.5), isto é,

$$\mathbf{E} = -j\omega\mu\nabla \times \mathbf{\Pi}_h = -j\omega\mu \left(\frac{\partial \mathbf{\Pi}_h}{\partial y} \mathbf{a}_x - \frac{\partial \mathbf{\Pi}_h}{\partial x} \mathbf{a}_y \right) \quad (6.31)$$

ou

$$\mathbf{E} = j\omega\mu \mathbf{a}_z \times \nabla_t \mathbf{\Pi}_h = j\omega\mu e^{-\gamma z} \mathbf{a}_z \times \nabla_t \psi_h \quad (6.32)$$

Enquanto o campo magnético é dado por

$$\mathbf{H} = k^2 \mathbf{\Pi}_h + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_h) = k^2 \psi_h e^{-\gamma z} \mathbf{a}_z - \gamma \nabla (\psi_h e^{-\gamma z}) \quad (6.33)$$

ou

$$\mathbf{H} = k_c^2 \psi_h e^{-\gamma z} \mathbf{a}_z - \gamma e^{-\gamma z} \nabla_t \psi_h \quad (6.34)$$

Sendo assim, as componentes dos campos para modo TE são obtidas de:

$$\mathbf{E}_t = j\omega\mu e^{-\gamma z} \mathbf{a}_z \times \nabla_t \psi_h \quad (6.35)$$

$$\mathbf{H}_t = -\gamma e^{-\gamma z} \nabla_t \psi_h \quad (6.36)$$

e

$$\mathbf{H}_z = k_c^2 \psi_h e^{-\gamma z} \mathbf{a}_z \quad (6.37)$$

onde a expressão de $\psi_h(x, y)$ vai depender da geometria da seção transversal do guia.

6.4.2 Modo Transversal Magnético

De maneira semelhante, pode-se obter os campos eletromagnéticos para o modo de propagação TM. Sendo que, neste caso, uma das componentes do campo elétrico está alinhada com a direção de propagação. Portanto, pode-se associar essa componente com o potencial vetor de Hertz do tipo elétrico

$$\mathbf{\Pi}_e = \Pi_e \mathbf{a}_z \quad (6.38)$$

considerando-se que o guia tem comprimento ao longo de z . Desta forma, os campos elétrico e magnético no interior do guia podem ser obtidos respectivamente de (6.23) e (6.6). A expressão do potencial vetor $\mathbf{\Pi}_e$ é fornecida por (6.22), que tem como solução, para uma onda propagando-se no sentido z^+ ,

$$\mathbf{\Pi}_e = \Pi_e \mathbf{a}_z = \psi_e(x, y) e^{-\gamma z} \mathbf{a}_z \quad (6.39)$$

Dessa maneira, a equação (6.22) pode ser reescrita como

$$\nabla_t^2 \mathbf{\Pi}_e + k_c^2 \mathbf{\Pi}_e = 0 \quad (6.40)$$

ou

$$\nabla_t^2 \psi_e + k_c^2 \psi_e = 0 \quad (6.41)$$

onde k_c^2 continua sendo dado por (6.30). Portanto, o campo magnético obtido de (6.6) é

$$\mathbf{H} = j\omega\epsilon \nabla \times \mathbf{\Pi}_e = j\omega\epsilon \left(\frac{\partial \Pi_e}{\partial y} \mathbf{a}_x - \frac{\partial \Pi_e}{\partial x} \mathbf{a}_y \right) \quad (6.42)$$

ou

$$\mathbf{H} = -j\omega\epsilon \mathbf{a}_z \times \nabla_t \Pi_e = -j\omega\epsilon e^{-\gamma z} \mathbf{a}_z \times \nabla_t \psi_e \quad (6.43)$$

enquanto o campo elétrico é dado por

$$\mathbf{E} = k^2 \mathbf{\Pi}_e + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_e) = k_c^2 \psi_e e^{-\gamma z} \mathbf{a}_z - \gamma e^{-\gamma z} \nabla_t \psi_e \quad (6.44)$$

Sendo assim, as componentes dos campos para modo TM são fornecidas por:

$$\mathbf{H}_t = -j\omega\epsilon e^{-\gamma z} \mathbf{a}_z \times \nabla_t \psi_e \quad (6.45)$$

$$\mathbf{E}_t = -\gamma e^{-\gamma z} \nabla_t \psi_e \quad (6.46)$$

e

$$\mathbf{E}_z = k_c^2 \psi_e e^{-\gamma z} \mathbf{a}_z \quad (6.47)$$

onde a expressão de $\psi_e(x, y)$ vai depender da geometria da seção transversal do guia.

6.5 Características de Ondas Guiadas

Com exceção das impedâncias modais, todas as expressões apresentadas a seguir são válidas para os modos TE e TM.

6.5.1 Constante de Propagação

Nota-se nas equações (6.29) e (6.41) que a propagação da onda num guia qualquer depende do parâmetro k_c , denominado número de onda de corte. Portanto, pode-se obter da equação (6.30)

$$\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2} \quad (6.48)$$

Se o número de onda k for igual a k_c , γ é zero e, conseqüentemente, não existe propagação de onda no guia. Para um guia sem perda onde $k < k_c$, γ é real (igual a α), a onda não se propaga e a intensidade dos campos diminui exponencialmente ao longo do comprimento. Quando neste mesmo guia $k > k_c$, tem-se $\gamma = j\beta$ e a onda propaga-se com constante de fase

$$\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2} \quad (6.49)$$

6.5.2 Comprimento de Onda Guiada e de Corte

O comprimento de onda de corte está relacionado com o número de onda de corte k_c através de

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c} \quad (6.50)$$

Para que haja propagação de onda no guia, o comprimento desta onda tem que ser menor que o comprimento fornecido pela equação (6.50), pois $k > k_c$ implica em $\lambda < \lambda_c$.

O comprimento da onda guiada é fornecido por

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \quad (6.51)$$

6.5.3 Freqüência de Corte

É simplesmente a razão entre a velocidade da luz no meio dielétrico que constitui o interior do guia e o comprimento de onda de corte. Isto é,

$$f_c = \frac{c}{\lambda_c \sqrt{\epsilon_r}} \quad (6.52)$$

6.5.4 Velocidade de Fase

A velocidade de fase da onda guiada é obtida de

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \lambda_g f = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2 \right]}} \quad (6.53)$$

6.5.5 Velocidade de Grupo

Sabe-se que a velocidade de grupo é definida como

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = \left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)^{-1} \quad (6.54)$$

logo, para uma onda propagando-se num guia, tem-se

$$v_g = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2} \quad (6.55)$$

Observa-se que, para $\lambda_c \gg \lambda$, a velocidade de grupo é igual a de fase que, por sua vez, é igual a velocidade de uma onda TEM num meio não dispersivo.

6.5.6 Impedâncias Modais

As impedâncias modais são definidas como a razão entre o módulo do vetor campo elétrico e o módulo do vetor campo magnético, ambos transversais à direção de propagação. Para o caso TE, estes campos são fornecidos respectivamente por (6.35) e (6.36), de forma que

$$Z_{TE} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \quad (6.56)$$

Quando não existem perdas, $\gamma = j\beta$ e

$$Z_{TE} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{k\eta}{\beta} \quad (6.57)$$

ou

$$Z_{TE} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \quad (6.58)$$

Já para o caso TM, a impedância é obtida da razão dos campos fornecidos por (6.46) e (6.45), isto é

$$Z_{TM} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\gamma}{j\omega\epsilon} \quad (6.59)$$

ou para o caso sem perdas

$$Z_{TM} = \eta\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} \quad (6.60)$$

Pode-se verificar que as impedâncias modais variam de acordo com a frequência de excitação e a frequência de corte.

6.6 Guia Retangular

Até agora, foram deduzidas expressões para guias com seção transversal qualquer. Quando a geometria da seção transversal do guia é definida, pode-se então resolver as equações diferenciais (6.29) e (6.41) e, assim, determinar as expressões dos campos, comprimento de onda de corte e outros parâmetros.

Os guias de seção retangular são muito utilizados na prática. Na notação adotada neste livro, a maior dimensão transversal tem comprimento a e está alinhada ao longo da direção x , enquanto a menor dimensão, b , coincide com o eixo y . A Figura 6.4b mostra a geometria deste tipo de guia.

6.6.1 Modo H (TE)

Para se obter os campos eletromagnéticos que se propagam, no modo TE, dentro de um guia retangular, resolve-se a equação diferencial (6.29), cuja solução fornece o comportamento dos campos no plano transversal à direção de propagação. A solução depende das condições de contorno que, neste caso, estão associadas às componentes tangenciais do campo elétrico nas paredes do guia. Sabe-se que estas componentes

tangenciais do campo elétrico na interface dielétrico-condutor são sempre iguais a zero, portanto, de (6.35) conclui-se que

$$\frac{\partial \psi_h}{\partial x} = 0 \quad (6.61)$$

nas paredes localizadas em $x = 0$ e $x = a$. Da mesma forma que

$$\frac{\partial \psi_h}{\partial y} = 0 \quad (6.62)$$

em $y = 0$ e $y = b$.

Utilizando-se o método da separação das variáveis, onde se considera

$$\psi_h(x, y) = f(x) g(y) \quad (6.63)$$

obtém-se de (6.29) duas equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + k_x^2 f(x) = 0 \quad (6.64)$$

e

$$\frac{d^2 g(y)}{dy^2} + k_y^2 g(y) = 0 \quad (6.65)$$

sendo

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (6.66)$$

A equação (6.64) tem solução do tipo

$$f(x) = C_1 e^{jk_x x} + C_2 e^{-jk_x x} \quad (6.67)$$

ou

$$f(x) = A \operatorname{sen} k_x x + B \operatorname{cos} k_x x \quad (6.68)$$

enquanto (6.65) fornece

$$g(y) = C \operatorname{sen} k_y y + D \operatorname{cos} k_y y \quad (6.69)$$

Sendo assim,

$$\psi_h(x, y) = (A \operatorname{sen} k_x x + B \operatorname{cos} k_x x) (C \operatorname{sen} k_y y + D \operatorname{cos} k_y y) \quad (6.70)$$

Aplicando-se as condições de contorno (6.61) em (6.70), tem-se

$$[Ak_x \cos k_x x - Bk_x \sin k_x x]_{x=0x=a} = 0 \quad (6.71)$$

Observe que, para $x = 0$, a $A = 0$ e, para $x = a$,

$$Bk_x \sin k_x a = 0 \quad (6.72)$$

portanto,

$$k_x a = m\pi \quad (6.73)$$

ou

$$k_x = \frac{m\pi}{a} \quad (6.74)$$

De maneira semelhante, aplicando-se as condições de contorno (6.62) em (6.70), obtém-se $C = 0$ e

$$k_y = \frac{n\pi}{b} \quad (6.75)$$

onde n e m são inteiros positivos. Substituindo (6.74) e (6.75) em (6.66), tem-se

$$k_c = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (6.76)$$

Portanto, o comprimento de onda de corte para o modo TE é dado por

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c} = \frac{2ab}{\sqrt{(mb)^2 + (na)^2}} \quad (6.77)$$

A equação (6.77) fornece os comprimentos de onda de corte possíveis para guias de onda retangulares. Sendo que o comprimento de onda de corte mais longo é obtido para $m = 1$ e $n = 0$, ou seja, $\lambda_c = 2a$, o que leva à frequência de corte mais baixa num dado guia de dimensões $a \times b$. Quando a frequência da onda injetada no guia tem valores próximos (e acima) desta frequência de corte, diz-se que o guia está operando no modo dominante ou, neste caso, TE_{10} . É lógico que outros modos do tipo TE podem ser excitados, isto vai depender da frequência de operação e da forma de excitação (posicionamento da(s) sonda(s)). Modos acima do dominante são denominados modos superiores, ou TE_{mn} , sendo m e n diferentes de um e zero, respectivamente.

As equações dos campos dentro do guia são obtidas substituindo

$$\psi_h(x, y) = BD \cos k_x x \cos k_y y = \frac{H_o}{k_c^2} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \quad (6.78)$$

em (6.35), (6.36) e (6.37). Observe que, para a componente de campo magnético em (6.37) ser expressa em A/m, é necessário que BD seja igual a H_o/k_c^2 , onde H_o é a intensidade máxima de campo magnético. Portanto,

$$E_x = -j\omega\mu e^{-\gamma z} \frac{\partial\psi_h}{\partial y} = \frac{n\pi\gamma}{bk_c^2} E_o \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-\gamma z} \quad (6.79)$$

$$E_y = j\omega\mu e^{-\gamma z} \frac{\partial\psi_h}{\partial x} = -\frac{m\pi\gamma}{ak_c^2} E_o \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-\gamma z} \quad (6.80)$$

$$H_x = -\gamma e^{-\gamma z} \frac{\partial\psi_h}{\partial x} = \frac{E_y}{Z_{TE}} \quad (6.81)$$

$$H_y = -\gamma e^{-\gamma z} \frac{\partial\psi_h}{\partial y} = -\frac{E_x}{Z_{TE}} \quad (6.82)$$

e

$$H_z = H_o \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-\gamma z} \quad (6.83)$$

Não havendo perdas, têm-se

$$E_x = \frac{jn\pi\beta}{bk_c^2} E_o \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-j\beta z} \quad (6.84)$$

$$E_y = -\frac{jm\pi\beta}{ak_c^2} E_o \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-j\beta z} \quad (6.85)$$

$$H_x = -\frac{E_y}{Z_{TE}} \quad (6.86)$$

$$H_y = \frac{E_x}{Z_{TE}} \quad (6.87)$$

e

$$H_z = H_o \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-j\beta z} \quad (6.88)$$

sendo

$$E_o = \frac{\omega\mu}{\beta} H_o \quad (6.89)$$

6.6.2 Modo E (TM)

Para se obter os campos eletromagnéticos que se propagam, nos modos TM_{mn} , dentro de um guia retangular, resolve-se a equação diferencial (6.41), cuja solução fornece o comportamento dos campos no plano transversal à direção de propagação. Como foi visto para o modo TE_{mn} , a solução depende das condições de contorno que, neste caso, estão associadas à componente tangencial do campo elétrico nas paredes do guia. Portanto, de (6.47) conclui-se que

$$\psi_e|_{x=0, x=a} = 0 \quad (6.90)$$

e

$$\psi_e|_{y=0, y=b} = 0 \quad (6.91)$$

Utilizando-se mais uma vez o método da separação das variáveis em (6.41) e aplicando-se as condições de contorno, obtém-se a solução do tipo

$$\psi_e(x, y) = \frac{E_o}{k_c^2} \text{sen } k_x x \text{ sen } k_y y \quad (6.92)$$

onde k_x e k_y são fornecidos por (6.74) e (6.75) respectivamente. O comprimento de onda de corte continua sendo dado por (6.76). Enquanto as componentes dos campos são obtidas de:

$$H_x = j\omega\epsilon e^{-\gamma z} \frac{\partial\psi_e}{\partial y} = \frac{n\pi\gamma}{bk_c^2} H_o \text{sen} \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left(\frac{n\pi}{b} y \right) e^{-\gamma z} \quad (6.93)$$

$$H_y = -j\omega\epsilon e^{-\gamma z} \frac{\partial\psi_e}{\partial x} = -\frac{m\pi\gamma}{ak_c^2} H_o \cos \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi}{b} y \right) e^{-\gamma z} \quad (6.94)$$

$$E_x = -\gamma e^{-\gamma z} \frac{\partial\psi_e}{\partial x} = Z_{TM} H_y \quad (6.95)$$

$$E_y = -\gamma e^{-\gamma z} \frac{\partial\psi_e}{\partial y} = -Z_{TM} H_x \quad (6.96)$$

e

$$E_z = E_o \text{sen} \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi}{b} y \right) e^{-\gamma z} \quad (6.97)$$

Não havendo perdas, têm-se

$$H_x = \frac{jn\pi\beta}{bk_c^2} H_o \text{sen} \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left(\frac{n\pi}{b} y \right) e^{-j\beta z} \quad (6.98)$$

$$H_y = -\frac{j m \pi \beta}{a k_c^2} H_o \cos\left(\frac{m \pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi}{b} y\right) e^{-j \beta z} \quad (6.99)$$

$$E_x = Z_{TM} H_y \quad (6.100)$$

$$E_y = -Z_{TM} H_x \quad (6.101)$$

e

$$E_z = E_o \operatorname{sen}\left(\frac{m \pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi}{b} y\right) e^{-j \beta z} \quad (6.102)$$

sendo

$$E_o = \frac{\beta}{\omega \epsilon} H_o \quad (6.103)$$

Observe nas equações acima que os modos TM_{m0} e TM_{0n} não existem, pois basta m ou n ser igual a zero para que todas as componentes dos campos sejam nulas. Sendo assim, o menor modo TM possível de se propagar num guia de seção transversal retangular é o modo TM_{11} .

Exemplo 6.1 *Determine as dimensões de um guia retangular oco para transmitir um conjunto de canais com frequência central igual a 7,75GHz e banda total igual a 500MHz. Qual o comprimento de onda guiado para a frequência central? O guia deve trabalhar no modo dominante.*

Solução: Para o modo dominante, TE_{10} , tem-se

$$f_c = \frac{c}{\lambda_c} = \frac{c}{2a}$$

A frequência de corte, neste caso, deve ser 7,5 GHz para possibilitar a transmissão dos canais compreendidos na faixa de 500MHz. Portanto, a largura do guia é então

$$a = \frac{c}{2f_c} = \frac{3 \times 10^8}{1,5 \times 10^{10}} = 0,02 \text{ m}$$

Neste caso, a altura do guia pode assumir qualquer valor que não seja muito pequeno. Em geral utiliza-se $b = a/2$. O comprimento de onda guiado, para a frequência central, é

$$\lambda_g = \frac{\lambda_o}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_o}{2a}\right)^2}} = \frac{0,0387}{\sqrt{1 - \left(\frac{0,0387}{0,04}\right)^2}} \simeq 0,154 \text{ m}$$

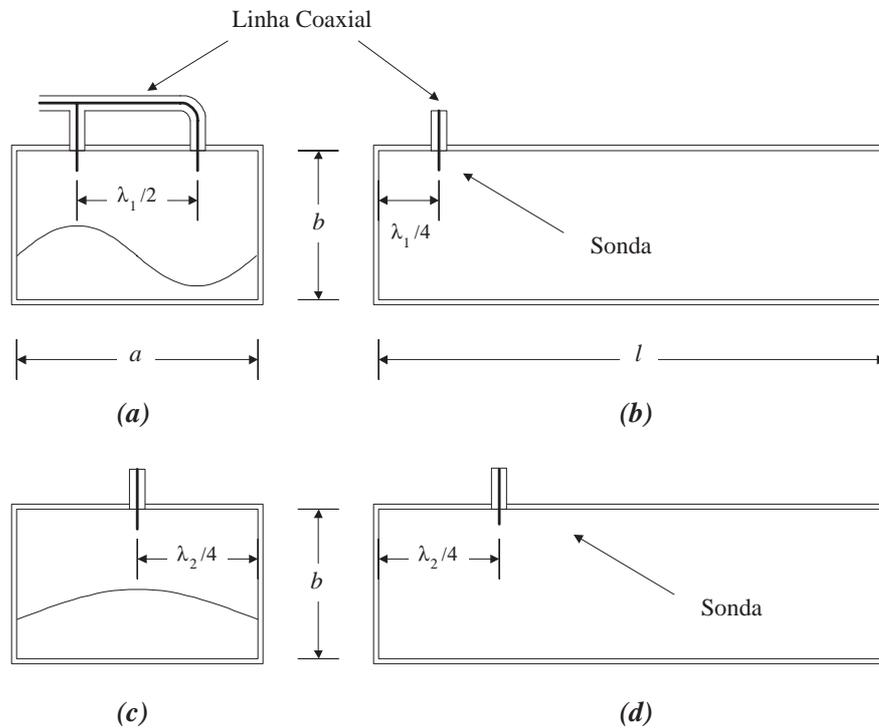


Figura 6.5: Guias retangulares com $a = 20\text{mm}$ e $b = 10\text{mm}$.

Exemplo 6.2 Determine as frequências de corte dos guias apresentados na Figura 6.5. Por que a distância entre as sondas e a parede transversal é igual a $\lambda/4$?

Solução: As Figuras 6.5a e 6.5b mostram um guia operando no modo TE, pois o campo elétrico gerado, que tem a mesma direção das sondas, é perpendicular à direção de propagação. A partir da posição e diferença de fase entre as sondas no plano transversal (Figura 6.5a), pode-se determinar que modo TE_{mn} o guia está operando. Observe que, neste caso, a diferença de fase introduzida pelo trecho de cabo entre as sondas é de 180° ($l = \lambda/2$). Portanto, quando a tensão é máxima numa sonda, na outra ela é mínima. Sabe-se que as ondas geradas pelas sondas são refletidas pelas paredes laterais do guia, produzindo, em determinadas frequências, padrões estacionários na direção transversal. A posição e a diferença de fase das sondas na Figura 6.5a indicam que o menor modo possível de propagação ocorre quando o padrão estacionário é igual a um comprimento de onda. Sendo assim, $\lambda_c = a = 20\text{mm}$ e

$$f_c = \frac{c}{\lambda_c} = \frac{c}{a} = 15 \text{ GHz}$$

produzindo-se o modo de operação TE_{20} . Já o guia apresentado nas figuras 6.5c e 6.5d opera no modo TE_{10} , pois a sonda está posicionada a uma distância $a/2$ das paredes laterais do guia, gerando um padrão igual a meio comprimento de onda. Logo, $\lambda_c = 2a = 40\text{mm}$ e

$$f_c = \frac{c}{\lambda_c} = \frac{c}{2a} = 7,5 \text{ GHz}$$

As sondas são posicionadas a $\lambda_g/4$ da parede transversal para evitar interferência destrutiva. Sabe-se que a reflexão da onda na parede condutora produz uma defasagem de π e que a defasagem da onda para ir até a parede e voltar é igual a

$$\Delta\phi = \beta l = \frac{2\pi}{\lambda_g} \left(\frac{\lambda_g}{4} + \frac{\lambda_g}{4} \right) = \pi$$

Portanto, a defasagem total é 2π , não havendo interferência destrutiva.

6.7 Guia Cilíndrico

A Figura 6.1a mostra um guia cilíndrico de raio a e comprimento l . Como foi visto no caso retangular, para se obter as características das ondas eletromagnéticas nos dois modos de propagação, torna-se necessário a resolução das equações diferenciais (6.29) e (6.41). Neste caso, por se tratar de uma geometria cilíndrica circular, tem-se como uma das equações diferenciais ordinárias, resultado do método da separação de variáveis, a equação de Bessel.

As equações (6.29) e (6.41) podem ser escritas, em coordenadas cilíndricas, como

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + k_c^2 \psi = 0 \quad (6.104)$$

onde $\psi(r, \varphi)$ pode ser $\psi_e(r, \varphi)$ ou $\psi_h(r, \varphi)$. Considerando-se que

$$\psi(r, \varphi) = f(r) g(\varphi) \quad (6.105)$$

obtem-se

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + \left(k_c^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) f = 0 \quad (6.106)$$

e

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} + \nu^2 g = 0 \quad (6.107)$$

A equação (6.106) é chamada de equação diferencial de Bessel e sua solução é da forma

$$f(r) = A J_\nu(k_c r) + B N_\nu(k_c r) \quad (6.108)$$

onde $J_\nu(x)$ é conhecida como função de Bessel do primeiro tipo e $N_\nu(x)$ função de Bessel do segundo tipo ou função de Neuman. Enquanto a (6.107) tem como solução

$$g(\varphi) = C \operatorname{sen} \nu \varphi + D \operatorname{cos} \nu \varphi \quad (6.109)$$

Como a função de Neuman tende a infinito quando $r \rightarrow 0$, então, para que haja uma solução que represente o fenômeno físico, B tem que ser igual a zero. Para que algum padrão estacionário exista na direção φ , é necessário que ν seja inteiro, pois a variação do campo tem que ser periódica com período igual a múltiplos de 2π . Sendo assim, tem-se

$$\psi(r, \varphi) = J_m(k_c r) [C_1 \operatorname{sen} m\varphi + C_2 \operatorname{cos} m\varphi] \quad (6.110)$$

ou simplesmente,

$$\psi(r, \varphi) = A J_m(k_c r) \operatorname{cos} m\varphi \quad (6.111)$$

onde m é um número inteiro positivo. A determinação das constantes C_1 e C_2 dependem das condições de contorno que, por sua vez, estão relacionadas com o campo tangencial elétrico na superfície interna do condutor cilíndrico.

6.7.1 Modo H (TE)

Para o caso TE_{mn} , a condição de contorno, obtida fazendo (6.35) igual a zero, é dada por

$$\left. \frac{\partial \psi_h}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \quad (6.112)$$

ou

$$\left. \frac{\partial J_m(k_c r)}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \quad (6.113)$$

o que corresponde às raízes da derivada da função de Bessel de ordem m (vide Figura 6.6), denominada aqui de p'_{mn} , sendo n a enésima raiz. Portanto, o número de onda de corte pode ser determinado utilizando-se

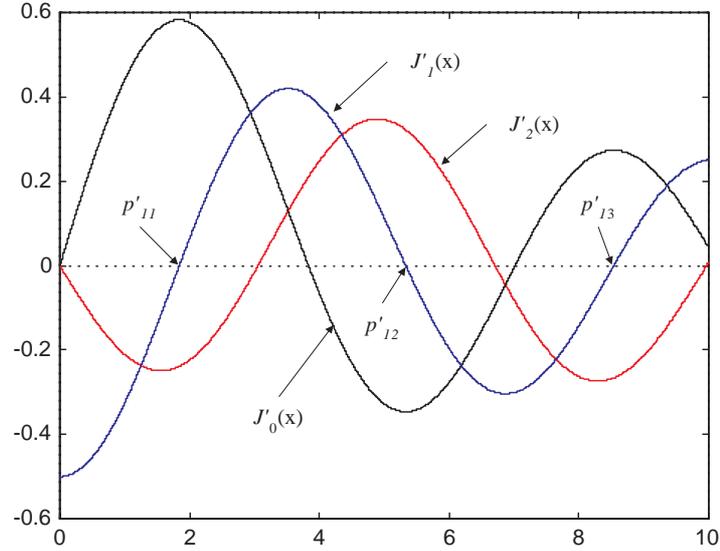


Figura 6.6: Gráficos das funções derivadas de Bessel $J'_m(x)$, onde são indicadas as raízes $p'_{11} = 1,84$, $p'_{12} = 5,33$ e $p'_{13} = 8,55$.

$$k_c = \frac{p'_{mn}}{a} \quad (6.114)$$

donde se pode obter o comprimento de onda de corte e outros parâmetros através das equações (6.48) a (6.60).

Os campos, fornecidos por (6.37), (6.35) e (6.36), têm as seguintes expressões:

$$H_z = H_o J_m(k_c r) \cos m\varphi e^{-\gamma z} \quad (6.115)$$

$$E_r = -j\omega\mu e^{-\gamma z} \frac{1}{r} \frac{\partial\psi_h}{\partial\varphi} = E_o \frac{m\gamma}{k_c^2 r} J_m(k_c r) \sin m\varphi e^{-\gamma z} \quad (6.116)$$

$$E_\varphi = j\omega\mu e^{-\gamma z} \frac{\partial\psi_h}{\partial r} = E_o \frac{\gamma}{k_c} \frac{\partial J_m(k_c r)}{\partial r} \cos m\varphi e^{-\gamma z} \quad (6.117)$$

$$H_r = -\gamma e^{-\gamma z} \frac{\partial\psi_h}{\partial r} = -\frac{E_\varphi}{Z_{TE}} \quad (6.118)$$

$$H_\varphi = -\gamma e^{-\gamma z} \frac{1}{r} \frac{\partial\psi_h}{\partial\varphi} = \frac{E_r}{Z_{TE}} \quad (6.119)$$

e, no caso sem perdas,

$$H_z = H_o J_m(k_c r) \cos m\varphi e^{-j\beta z} \quad (6.120)$$

$$E_r = E_o \frac{j m \beta}{k_c^2 r} J_m(k_c r) \sin m\varphi e^{-j\beta z} \quad (6.121)$$

$$E_\varphi = E_o \frac{j\beta}{k_c} \frac{\partial J_m(k_c r)}{\partial r} \cos m\varphi e^{-j\beta z} \quad (6.122)$$

$$H_r = -\frac{E_\varphi}{Z_{TE}} \quad (6.123)$$

$$H_\varphi = \frac{E_r}{Z_{TE}} \quad (6.124)$$

6.7.2 Modo E (TM)

Para o caso TM_{mn} , a condição de contorno, obtida fazendo (6.47) igual a zero, é dada por

$$\psi_e|_{r=a} = 0 \quad (6.125)$$

ou

$$J_m(k_c r)|_{r=a} = 0 \quad (6.126)$$

o que corresponde às raízes da função de Bessel de ordem m (vide Figura 6.7), denominada aqui de p_{mn} , sendo n a n ésima raiz. Portanto, o número de onda de corte pode ser determinado utilizando-se

$$k_c = \frac{p_{mn}}{a} \quad (6.127)$$

donde, mais uma vez, se pode obter o comprimento de onda de corte e outros parâmetros através das equações (6.48) a (6.60). A Tabela (6.1) contém as raízes das funções de Bessel e derivadas para alguns modos de propagação.

Os campos, fornecidos por (6.47), (6.45) e (6.46), têm as seguintes expressões:

$$E_z = E_o J_m(k_c r) \cos m\varphi e^{-\gamma z} \quad (6.128)$$

$$H_r = j\omega\epsilon e^{-\gamma z} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_e}{\partial \varphi} = -H_o \frac{m\gamma}{k_c^2 r} J_m(k_c r) \sin m\varphi e^{-\gamma z} \quad (6.129)$$

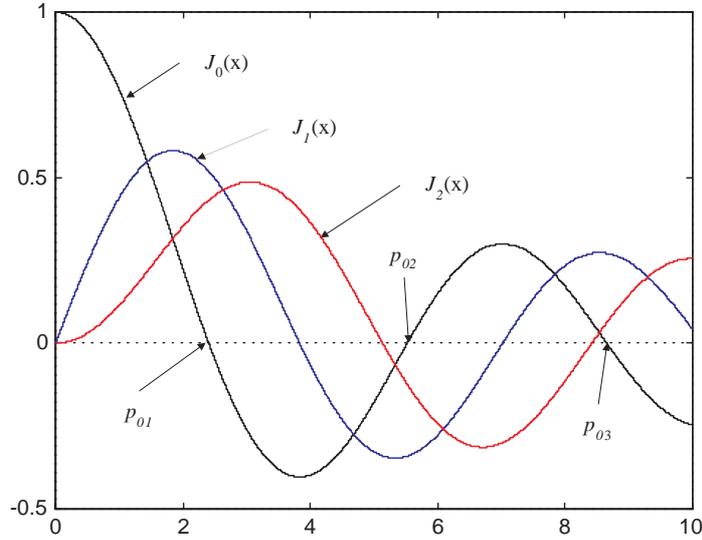


Figura 6.7: Gráficos das funções de Bessel $J_m(x)$, onde são indicadas as raízes $p_{01} = 2,4$, $p_{02} = 5,52$ e $p_{03} = 8,64$.

$$H_\varphi = -j\omega\epsilon e^{-\gamma z} \frac{\partial\psi_e}{\partial r} = -H_o \frac{\gamma}{k_c} \frac{\partial J_m(k_c r)}{\partial r} \cos m\varphi e^{-\gamma z} \quad (6.130)$$

$$E_r = -\gamma e^{-\gamma z} \frac{\partial\psi_e}{\partial r} = -Z_{TM} H_\varphi \quad (6.131)$$

$$E_\varphi = -\gamma e^{-\gamma z} \frac{1}{r} \frac{\partial\psi_e}{\partial\varphi} = Z_{TM} H_r \quad (6.132)$$

e, no caso sem perdas,

$$E_z = E_o J_m(k_c r) \cos m\varphi e^{-j\beta z} \quad (6.133)$$

$$H_r = -H_o \frac{j\beta}{k_c^2 r} J_m(k_c r) \sin m\varphi e^{-j\beta z} \quad (6.134)$$

$$H_\varphi = -H_o \frac{j\beta}{k_c} \frac{\partial J_m(k_c r)}{\partial r} \cos m\varphi e^{-j\beta z} \quad (6.135)$$

$$E_r = -Z_{TM} H_\varphi \quad (6.136)$$

$$E_\varphi = Z_{TM} H_r \quad (6.137)$$

Tabela 6.1: Raízes das funções de Bessel para diferentes modos de propagação.

Modo	mn	01	02	03	11	12	13	21	22	23
TE	p'	3,832	7,016	10,173	1,841	5,332	8,537	3,054	6,706	9,969
TM	p	2,405	5,52	8,654	3,832	7,016	10,173	5,136	8,417	11,62

Exemplo 6.3 *Um guia cilíndrico oco é excitado através de uma sonda reta posicionada no centro da parede transversal. Determine o raio deste guia para a frequência de corte de 5GHz.*

Solução: O modo de operação, neste caso, é do tipo TM, uma vez que as componentes de campo magnético são transversais à direção de propagação (campo magnético circulando em torno da sonda). O campo elétrico é máximo no centro do guia, onde está posicionada a sonda, portanto, a função de Bessel adequada ao problema é $J_0(k_c a)$. Escolhendo-se o modo de propagação mais baixo, tem-se

$$a = \frac{p_{mn}}{k_c} = \frac{p_{01}c}{2\pi f_c} = \frac{2,4 \times 3 \times 10^8}{2\pi \times 5 \times 10^9} \simeq 0,023 \text{ m}$$

onde o modo de operação é o TM_{01} .

6.8 Atenuação em Guias

A atenuação nos guias de onda está associada com as perdas nas paredes condutoras do guia e no dielétrico que preenche o espaço interno deste. Sabe-se que as ondas se propagam dentro de um guia de acordo com $e^{\pm\gamma z}$, quando este se encontra alinhado com o eixo z . A intensidade dos campos, neste caso, decai exponencialmente ao longo do comprimento, ou seja, para uma onda propagando-se no sentido z^+ , o campo elétrico diminui conforme a equação

$$E(z) = E_o e^{-\alpha z} \quad (6.138)$$

lembrando-se que α é o fator de atenuação e E_o é a intensidade inicial do campo no plano $z = 0$.

6.8.1 Atenuação abaixo da Frequência de Corte

Para as frequências abaixo da frequência de corte não existe propagação de onda e sim campos evanescentes. A redução de intensidade dos campos ao longo do comprimento pode ser medida através de um fator de atenuação dado por

$$\alpha = \sqrt{k_c^2 - k^2} \quad (6.139)$$

ou

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2 - 1} \quad (6.140)$$

lembrando-se que $k_c > k$. No caso de $\lambda \gg \lambda_c$, tem-se

$$\alpha \approx \frac{2\pi}{\lambda_c} \quad (6.141)$$

Em geral, o fator de atenuação é expresso em dB/m, ou seja,

$$\alpha_{dB} = 20 \log e^\alpha \simeq 8,686\alpha \quad (6.142)$$

Exemplo 6.4 *Determine a atenuação do guia cilíndrico do Exemplo 6.3 considerando que a frequência de excitação é 4,95GHz.*

Solução: A atenuação pode ser obtida diretamente da equação (6.140), ou seja,

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda_o} \sqrt{\left(\frac{\lambda_o}{\lambda_c}\right)^2 - 1} = \frac{2\pi f}{c} \sqrt{\left(\frac{f_c}{f}\right)^2 - 1} \simeq 14,77$$

uma vez que $f_c/f = 5/4,95 = 1,0101$. O valor da atenuação em decibéis é

$$\alpha_{dB} = 8,686 \times 14,77 \simeq 128,29 \text{ dB}$$

6.8.2 Atenuação acima da Frequência de Corte

As perdas no dielétrico que preenche o interior do guia, para frequências acima da frequência de corte, estão relacionadas com o fator de atenuação

$$\alpha_d = \text{Re}\{\gamma\} \quad (6.143)$$

Sabe-se que a permissividade de um dielétrico que oferece perdas é complexa, portanto,

$$\alpha_d = \text{Re} \sqrt{k_c^2 - \omega^2 \mu (\epsilon' - j\epsilon'')} \quad (6.144)$$

Se a tangente de perdas

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \ll 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2 \quad (6.145)$$

então, pode-se demonstrar que

$$\alpha_d \approx \frac{\pi \operatorname{tg} \delta}{\lambda \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2}} \quad (6.146)$$

Para um guia oco tem-se $\epsilon'' \simeq 0$ e $\alpha_d = 0$.

A potência transmitida ao longo do comprimento do guia é proporcional ao quadrado do campo elétrico, portanto,

$$P(z) = P_o e^{-2\alpha z} \quad (6.147)$$

sendo P_o a potência inicial. O fator de atenuação devido a perdas nas paredes condutoras pode ser obtido a partir de

$$\frac{dP}{dz} = -2\alpha P \quad (6.148)$$

ou seja,

$$\alpha = -\frac{1}{2P} \frac{dP}{dz} \quad (6.149)$$

A equação (6.149) indica que o fator de atenuação é a razão entre a taxa de redução da potência $-\frac{dP}{dz}$ e duas vezes a potência transmitida $2P$. A potência média transmitida é obtida da integração do vetor de Poynting na direção de propagação,

$$P = \iint_S \mathbf{W}_z \cdot d\mathbf{s} \quad (6.150)$$

ou

$$P = \frac{\operatorname{Re}\{Z_{mn}\}}{2} \iint_S |H_t|^2 ds \quad (6.151)$$

onde S é a área da seção transversal do guia, H_t é o campo magnético transversal e Z_{mn} a impedância modal, fornecida por (6.58) no caso TE ou por (6.60) no caso TM. Enquanto que a potência perdida nas paredes do guia está associada à componente de onda que incide normalmente no condutor, ou seja,

$$-\frac{dP}{dz} = \oint_C \mathbf{W}_t \cdot d\mathbf{l} \quad (6.152)$$

ou

$$-\frac{dP}{dz} = \frac{\text{Re}\{\eta_c\}}{2} \oint_C \left[|H_z|^2 + |H'_t|^2 \right] dl \quad (6.153)$$

onde H'_t representa as componentes transversais que são paralelas às paredes do guia, C o perímetro da seção transversal e η_c a impedância intrínseca do material condutor. O fator de atenuação devido às paredes condutoras do guia é portanto dado por

$$\alpha_c = \frac{\text{Re}\{\eta_c\} \oint_C \left[|H_z|^2 + |H'_t|^2 \right] dl}{2 \text{Re}\{Z_{mn}\} \iint_S |H_t|^2 ds} \quad (6.154)$$

A atenuação total no guia é obtida através do produto entre o comprimento e o fator de atenuação total, isto é,

$$A_{dB} = 8,69(\alpha_d + \alpha_c) l \quad (6.155)$$

Quando o guia é oco, tem-se

$$A_{dB} = 8,69\alpha_c l \quad (6.156)$$

6.8.3 Atenuação num Guia Retangular

Substituindo-se as equações dos campos eletromagnéticos de um guia retangular na equação (6.154), demonstra-se que [29], para os modos TE,

$$\alpha_c = \frac{R_c}{bZ_d} \left[\left(\delta_n + \delta_m \frac{b}{a} \right) \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2} + \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2} \right) \frac{\delta_n m^2 b^2 + \delta_m n^2 ab}{m^2 b^2 + n^2 a^2} \right] \quad (6.157)$$

e, para os modos TM,

$$\alpha_c = \frac{2R_c}{bZ_d} \frac{m^2 b^3 + n^2 a^3}{m^2 b^2 a + n^2 a^3} \quad (6.158)$$

sendo Z_d fornecida por (6.58), no caso *TE*, e por (6.60), no caso *TM*. A resistência das paredes condutoras é obtida de

$$R_c = \sqrt{\frac{\omega \mu_o}{2\sigma}} \quad (6.159)$$

O parâmetro δ_m é igual a 1 para $m = 0$ e igual a 2 quando $m \neq 0$. Idem para δ_n .

6.8.4 Atenuação num Guia Cilíndrico

Substituindo-se as equações dos campos eletromagnéticos de um guia cilíndrico na equação (6.154), pode-se demonstrar que [27], para os modos TE,

$$\alpha_c = \frac{R_c}{a Z_d} \left[\left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2 + \frac{m^2}{(p'_{mn})^2 - m^2} \right] \quad (6.160)$$

e, para os modos TM,

$$\alpha_c = \frac{R_c}{a Z_d} \quad (6.161)$$

Exemplo 6.5 *Continuando com o guia cilíndrico do Exemplo 6.3, determine a atenuação para uma frequência de operação 10% acima da frequência de corte. Considere 10m de um guia feito de latão, cuja condutividade relativa ao cobre é 28%.*

Solução: Como o modo de operação é o TM_{01} , então, deve-se utilizar a equação (6.161) para se determinar o fator de atenuação devido às paredes condutoras. Sendo o guia oco, a atenuação total é então dada por

$$A = 8,686\alpha_c l = \frac{8,686lR_c}{a\eta} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2 \right]^{-1/2} = \frac{0,553R_c}{a}$$

onde $a = 0,023\text{m}$ e

$$R_c = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = \sqrt{\frac{\pi \times 4,95 \times 10^9 \times 4\pi \times 10^{-7}}{0,28 \times 5,8 \times 10^7}} \simeq 0,035\Omega$$

Portanto,

$$A = \frac{0,553 \times 0,035}{0,023} \simeq 0,842 \text{ dB}$$

6.9 Cavidade Ressonante

Cavidades ressonantes são dispositivos que armazenam energia na forma de campos eletromagnéticos. Elas são compartimentos metálicos fechados, comumente de forma cúbica ou cilíndrica, onde a energia eletromagnética é armazenada ou retirada através de sondas ou fendas devidamente posicionadas em suas paredes. A Figura 6.8 mostra dois exemplos de cavidade ressonante e seu circuito equivalente. Uma cavidade ressonante se comporta como um circuito tanque, sendo assim, pode ser

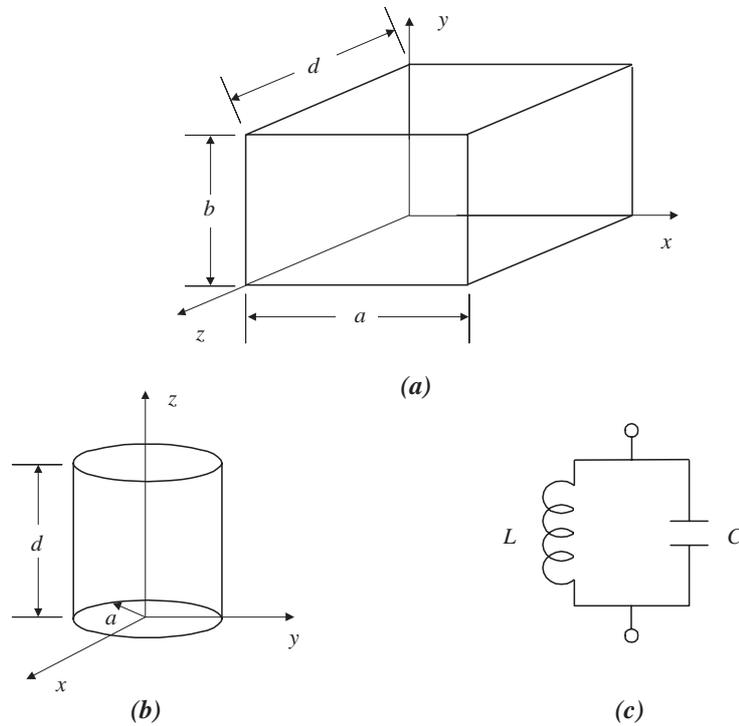


Figura 6.8: Tipos de cavidades: (a) de paredes retangular; (b) cilíndrica. (c) circuito equivalente.

utilizada como filtro ou em circuitos osciladores. A diferença entre as cavidades e os circuitos ressonantes de alta frequência, que utilizam componentes como capacitores e indutores, está na capacidade de trabalhar com potências relativamente altas.

As principais características de uma cavidade ressonante são a frequência de ressonância e o fator de qualidade. A primeira é fornecida por

$$f_r = \frac{c}{\lambda_r \sqrt{\epsilon_r}} \quad (6.162)$$

sendo

$$\lambda_r = \frac{2\pi}{k_r} \quad (6.163)$$

onde k_r é denominado número de onda de ressonância, cuja a expressão depende da geometria da cavidade e do modo de excitação. Enquanto que o fator de qualidade é definido como sendo o produto da energia máxima armazenada pela frequência angular de ressonância, dividido pela potência dissipada, ou seja,

$$Q = \frac{\omega_r \mathcal{E}_{\max}}{P_d} \quad (6.164)$$

sendo \mathcal{E}_{\max} a energia máxima, obtida de (1.111) ou (1.112), e P_d a potência dissipada, dada por

$$P_d = \frac{\operatorname{Re}\{\eta_c\}}{2} \iint_S |H_t|^2 ds \quad (6.165)$$

Portanto, pode-se escrever o fator de qualidade como

$$Q = \frac{2\omega_r \iiint_V U_{\max} dv}{\operatorname{Re}\{\eta_c\} \iint_S |H_t|^2 ds} \quad (6.166)$$

lembrando-se que H_t representa as componentes de campo magnético tangenciais à superfície interna das paredes condutoras, S é a área interna total, V o volume da cavidade e U_{\max} é a densidade volumétrica máxima de energia. O fator de qualidade é também relacionado com a largura da faixa de passagem (ou rejeição) através de

$$Q = \frac{f_r}{\Delta f} \quad (6.167)$$

onde Δf é a faixa de frequências cuja atenuação é menor ou igual a 3dB.

6.9.1 Cavidade com Paredes Retangulares

Uma cavidade ressonante constituída de paredes retangulares pode ser considerada, para efeito de análise, como um guia de onda de seção transversal retangular encerrado por uma parede condutora (vide Figura 6.8a). Um padrão estacionário se estabelece ao longo da direção de propagação, se a distância entre as paredes transversais for igual a múltiplos de meio comprimento de onda de excitação, ou seja,

$$d = l \frac{\lambda}{2} \quad (6.168)$$

onde, neste caso, l é um número inteiro positivo. Portanto, a função que descreve a variação dos campos na direção de propagação, para um guia sem perdas, não é mais do tipo $e^{-j\beta z}$ ou $e^{j\beta z}$, mas a superposição das duas. Por exemplo, o campo elétrico transversal pode ser escrito como

$$E_t = E_{t1}(x, y) e^{j\beta z} + E_{t2}(x, y) e^{-j\beta z} \quad (6.169)$$

O coeficiente de reflexão no plano $z = 0$ é

$$\rho(0) = \frac{E_{t2}}{E_{t1}} = -1 \quad (6.170)$$

logo

$$E_t = 2jE_{t1}(x, y) \operatorname{sen} \beta z \quad (6.171)$$

ou, para $z = d$,

$$\rho(d) = \frac{E_{t1}}{E_{t2}} e^{2j\beta z} = -1 \quad (6.172)$$

e

$$E_t = -2jE_{t2}(x, y) \operatorname{sen} \beta z \quad (6.173)$$

Sabe-se que este campo é nulo nas paredes transversais, logo, se

$$E_t|_{z=d} = 0 \quad (6.174)$$

então

$$\operatorname{sen} \beta d = 0 \quad (6.175)$$

donde se conclui que

$$k_z = \beta = \frac{l\pi}{d} \quad (6.176)$$

Assim, o número de onda de ressonância pode ser calculado a partir de

$$k_r = \sqrt{k_c^2 + \left(\frac{l\pi}{d}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{d}\right)^2} \quad (6.177)$$

conseqüentemente, tem-se

$$f_r = \frac{c}{2\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{l}{d}\right)^2} \quad (6.178)$$

Como foi visto, o modo de ressonância de uma cavidade depende das dimensões a , b e d da mesma, além dos inteiros positivos m , n e l , que representam os múltiplos de $\lambda/2$ possíveis de existir em cada uma das dimensões. Nos guias, os modos foram denominados TE_{mn} ou TM_{mn} . No caso das cavidades, esta denominação só faz

sentido se uma das direções for definida como direção de propagação. Por exemplo, para uma cavidade oca onde a sonda de excitação é introduzida exatamente no centro da parede de área ad , pode-se obter o modo de ressonância TE_{110} se a direção z for considerada como direção de propagação. Entretanto, se a direção y for definida como direção de propagação, o modo de ressonância é então TM_{011} . Sendo assim, estabelecendo-se z como referência de propagação, os campos do modo de ressonância TE_{lmn} são fornecidos por:

$$E_x = 2 \frac{E_o}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \frac{l\pi}{d} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{l\pi}{d} z\right) \quad (6.179)$$

$$E_y = -2 \frac{E_o}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \frac{l\pi}{d} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{l\pi}{d} z\right) \quad (6.180)$$

$$H_x = 2j \frac{H_o}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \frac{l\pi}{d} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{l\pi}{d} z\right) \quad (6.181)$$

$$H_y = 2j \frac{H_o}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \frac{l\pi}{d} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{l\pi}{d} z\right) \quad (6.182)$$

$$H_z = -2j H_o \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{l\pi}{d} z\right) \quad (6.183)$$

e

$$E_z = 0 \quad (6.184)$$

sendo

$$E_o = \frac{\omega\mu}{\beta} H_o \quad (6.185)$$

Enquanto que, para o modo TM_{lmn} , têm-se

$$H_x = 2j \frac{H_o}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \frac{l\pi}{d} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{l\pi}{d} z\right) \quad (6.186)$$

$$H_y = -2j \frac{H_o}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \frac{l\pi}{d} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{l\pi}{d} z\right) \quad (6.187)$$

$$E_x = -2 \frac{E_o}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \frac{l\pi}{d} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{l\pi}{d} z\right) \quad (6.188)$$

$$E_y = -2 \frac{E_o}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \frac{l\pi}{d} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{l\pi}{d} z\right) \quad (6.189)$$

$$E_z = 2E_o \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \cos \left(\frac{l\pi}{d} z \right) \quad (6.190)$$

e

$$H_z = 0 \quad (6.191)$$

sendo

$$H_o = \frac{\omega\epsilon}{\beta} E_o \quad (6.192)$$

Observe que as componentes de campo elétrico estão defasadas de 90° em relação às componentes de campo magnético, isto significa que, quando um campo é máximo, o outro é nulo. Portanto, existem instantes em que a energia é puramente elétrica e instantes em que a energia é puramente magnética. Comportamento semelhante a de um circuito tanque LC , onde ora a energia está armazenada na forma de campo elétrico no capacitor e ora na forma de campo magnético no indutor.

6.9.2 Cavidade Cilíndrica

Para cavidade cilíndrica, do tipo mostrado na Figura 6.8b, onde o comprimento d está alinhado na direção z , tem-se

$$k_r = \sqrt{k_c^2 + \left(\frac{l\pi}{d} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{p_{mn}}{a} \right)^2 + \left(\frac{l\pi}{d} \right)^2} \quad (6.193)$$

para modos $\text{TM}_{l_{mn}}$, e

$$k_r = \sqrt{\left(\frac{p'_{mn}}{a} \right)^2 + \left(\frac{l\pi}{d} \right)^2} \quad (6.194)$$

para os modos $\text{TE}_{l_{mn}}$. Portanto, a frequência de ressonância é dada por

$$f_r = \frac{c}{2\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{p_{mn}}{\pi a} \right)^2 + \left(\frac{l}{d} \right)^2} \quad (6.195)$$

para os modos $\text{TM}_{l_{mn}}$, e

$$f_r = \frac{c}{2\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{p'_{mn}}{\pi a} \right)^2 + \left(\frac{l}{d} \right)^2} \quad (6.196)$$

para os modos TE_{lmn} . Utiliza-se o mesmo procedimento aplicado às cavidades com paredes retangulares para obter os campos eletromagnéticos. Suas expressões para o modo TE_{lmn} são:

$$H_z = -2jH_o J_m(k_c r) \cos m\varphi \operatorname{sen} \left(\frac{l\pi}{d} z \right) \quad (6.197)$$

$$E_r = 2 \frac{mE_o l\pi}{k_c^2 r d} J_m(k_c r) \operatorname{sen} m\varphi \operatorname{sen} \left(\frac{l\pi}{d} z \right) \quad (6.198)$$

$$E_\varphi = 2 \frac{E_o l\pi}{k_c d} \frac{\partial J_m(k_c r)}{\partial r} \cos m\varphi \operatorname{sen} \left(\frac{l\pi}{d} z \right) \quad (6.199)$$

$$H_r = -2j \frac{H_o l\pi}{k_c d} \frac{\partial J_m(k_c r)}{\partial r} \cos m\varphi \cos \left(\frac{l\pi}{d} z \right) \quad (6.200)$$

$$H_\varphi = 2j \frac{mH_o l\pi}{k_c^2 r d} J_m(k_c r) \operatorname{sen} m\varphi \cos \left(\frac{l\pi}{d} z \right) \quad (6.201)$$

e para o modo TM_{lmn}

$$E_z = 2E_o J_m(k_c r) \cos m\varphi \cos \left(\frac{l\pi}{d} z \right) \quad (6.202)$$

$$H_r = -2j \frac{mH_o l\pi}{k_c^2 r d} J_m(k_c r) \operatorname{sen} m\varphi \cos \left(\frac{l\pi}{d} z \right) \quad (6.203)$$

$$H_\varphi = -2j \frac{H_o l\pi}{k_c d} \frac{\partial J_m(k_c r)}{\partial r} \cos m\varphi \cos \left(\frac{l\pi}{d} z \right) \quad (6.204)$$

$$E_r = 2 \frac{E_o l\pi}{k_c d} \frac{\partial J_m(k_c r)}{\partial r} \cos m\varphi \operatorname{sen} \left(\frac{l\pi}{d} z \right) \quad (6.205)$$

$$E_\varphi = -2 \frac{mE_o l\pi}{k_c^2 r d} J_m(k_c r) \operatorname{sen} m\varphi \operatorname{sen} \left(\frac{l\pi}{d} z \right) \quad (6.206)$$

6.9.3 Fator de Qualidade para Cavidades Cúbicas

O fator de qualidade para uma cavidade de paredes retangulares, operando no modo TE_{lmn} , é obtido substituindo as expressões dos campos na equação (6.166). A densidade volumétrica máxima de energia, que ora é magnética ora é elétrica, pode ser obtida de

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \mu H^2 \quad (6.207)$$

No modo TE_{lm0} , têm-se

$$E_x = E_z = 0 \quad (6.208)$$

e

$$E_y = -2E_o \frac{la}{md} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \operatorname{sen} \left(\frac{l\pi}{d} z \right) \quad (6.209)$$

logo

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \epsilon E_y^2 = 2\epsilon E_o^2 \left(\frac{la}{md} \right)^2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \operatorname{sen}^2 \left(\frac{l\pi}{d} z \right) \quad (6.210)$$

Sendo assim, a energia máxima armazenada na cavidade é obtida de

$$\mathcal{E}_{\max} = 2\epsilon E_o^2 \left(\frac{la}{md} \right)^2 \int_0^a \int_0^b \int_0^d \operatorname{sen}^2 \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \operatorname{sen}^2 \left(\frac{l\pi}{d} z \right) dx dy dz \quad (6.211)$$

ou

$$\mathcal{E}_{\max} = \epsilon E_o^2 \left(\frac{la}{md} \right)^2 \frac{abd}{2} = \epsilon \frac{abd}{2} \left(\frac{\omega \mu H_o a}{m\pi} \right)^2 \quad (6.212)$$

ou ainda

$$\mathcal{E}_{\max} = \frac{\mu H_o^2 abd}{2} \left[\left(\frac{la}{md} \right)^2 + 1 \right] \quad (6.213)$$

A potência dissipada nas paredes condutoras é dada por

$$P_d = \frac{\operatorname{Re} \{ \eta_c \}}{2} \iint_S |H_t|^2 = P_x + P_y + P_z \quad (6.214)$$

sendo

$$P_x = \operatorname{Re} \{ \eta_c \} \int_0^b \int_0^d |H_y|^2 dy dz = 2 \operatorname{Re} \{ \eta_c \} H_o^2 bd \quad (6.215)$$

$$P_y = \operatorname{Re} \{ \eta_c \} \int_0^a \int_0^d |H_z|^2 dx dz = \operatorname{Re} \{ \eta_c \} H_o^2 ad \left[\left(\frac{la}{md} \right)^2 + 1 \right] \quad (6.216)$$

$$P_z = \operatorname{Re} \{ \eta_c \} \int_0^a \int_0^b |H_x|^2 dx dy = 2 \operatorname{Re} \{ \eta_c \} H_o^2 ab \left(\frac{la}{md} \right)^2 \quad (6.217)$$

Portanto, o fator de qualidade é fornecido por

$$Q = \frac{\omega_r \mathcal{E}_{\max}}{P_d} = \frac{V}{\delta_p} \frac{\left(\frac{la}{md} \right)^2 + 1}{2bd + ad \left[\left(\frac{la}{md} \right)^2 + 1 \right] + 2ab \left(\frac{la}{md} \right)^2} \quad (6.218)$$

onde V é o volume da cavidade e δ_p a profundidade de penetração no condutor. Finalmente, para uma cavidade cúbica operando no modo TE_{110} , tem-se

$$Q = \frac{2V}{\delta_p S} \quad (6.219)$$

sendo S a área total da superfície interna das paredes condutoras.

Exemplo 6.6 *Projete uma cavidade cúbica, feita de cobre, para operar a 10GHz no modo TE_{110} com uma banda de 1MHz.*

Solução: Considerando que a aresta da cavidade é fornecida pela variável a , pode-se reescrever a equação (6.219) como

$$Q = \frac{2a^3}{6\delta_p a^2} = \frac{a}{3\delta_p}$$

Portanto,

$$a = \frac{3\delta_p}{Q} = \frac{3\delta_p \Delta f}{f} \simeq \frac{0,198 \Delta f}{f^{3/2}} = 0,198 \text{ m}$$

6.9.4 Fator de Qualidade para Cavidades Cilíndricas

Pode-se mostrar que o fator de qualidade para cavidades cilíndricas, operando no modo TE_{lmn} , é fornecido por [8] [4]

$$Q = \frac{\lambda_r \left[1 - \left(\frac{m}{p'_{mn}} \right)^2 \right] \left[(p'_{mn})^2 + \left(\frac{l\pi a}{d} \right)^2 \right]^{3/2}}{2\pi\delta_p \left[(p'_{mn})^2 + \left(\frac{2a}{d} \right) \left(\frac{l\pi a}{d} \right)^2 + \left(1 - \frac{2a}{d} \right) \left(\frac{ml\pi a}{p'_{mn}d} \right)^2 \right]} \quad (6.220)$$

e para o modo TM_{lmn}

$$Q = \frac{\lambda_r \sqrt{(p_{mn})^2 + \left(\frac{l\pi a}{d} \right)^2}}{2\pi\delta_p \left(1 + \frac{2a}{d} \right)} \quad (6.221)$$

quando $l > 0$ e

$$Q = \frac{\lambda_r p_{mn}}{2\pi\delta_p \left(1 + \frac{a}{d} \right)} \quad (6.222)$$

quando $l = 0$.

